



# جزوه دینامیک

---

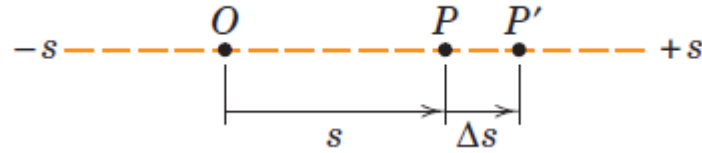
کاملاً تایپ شده و با کیفیت

[www.gam98.ir](http://www.gam98.ir)

# سینماتیک ذرات

در سینماتیک ذرات به بررسی حرکت ذرات صرف نظر از نیروی بوجود آورنده حرکت می پردازیم.

## حرکت مستقیم الخط



در حرکت مستقیم الخط، ذره فقط در یک راستا و آن هم بصورت خط (نه انحناء) حرکت می کند. با این نوع حرکت در دبیرستان آشنا شده ایم. روابط سرعت و شتاب براساس جابجایی بصورت زیر می باشد.

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad \text{شتاب}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \text{سرعت}$$

$$v dv = a ds$$

با حذف زمان از معادلات فوق، به رابطه پرکاربرد "مستقل از زمان" می رسم.

با استفاده از معادلات سینماتیکی فوق، حرکت یک متحرک را به راحتی ارزیابی می کنیم. مسائل سینماتیک در حرکت مستقیم الخط ممکن است به یکی از ۴ شکل زیر ظاهر شوند.

**(الف) شتاب ثابت:** به راحتی با انتگرال گیری از شتاب، سرعت را بدست آورده و سپس تغییرمکان را می یابیم.

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 + at \quad \longrightarrow \quad \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad \longrightarrow \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

(ب) شتاب تابعی از زمان باشد: به راحتی با انتگرال گیری از شتاب، سرعت را بدست آورده و سپس تغییر مکان را می یابیم.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 + \int_0^t f(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt$$

(ج) شتاب تابعی از سرعت باشد: از تعریف شتاب، که سرعت را بیان می کند استفاده می کنیم.

$$a = f(v) \quad \longrightarrow \quad f(v) = dv/dt, \quad \longrightarrow \quad t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}$$

مستقل از زمان  $\longrightarrow v dv = f(v) \longrightarrow \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} = \int_{s_0}^s ds \longrightarrow s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)}$

دقت داشته باشید که رابطه فوق S را برحسب v محاسبه می کند. از طرفی رابطه زمان نیز با سرعت مشخص شده، پس رابطه S با زمان بدست می آید.

(د) شتاب تابعی از مکان باشد:  $a = f(s)$  از رابطه مستقل از زمان و تعریف سرعت استفاده می کنیم.

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds \quad \longrightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s f(s) ds \quad \longrightarrow \quad v = g(s), \quad \longrightarrow \quad \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt$$

$$\longrightarrow t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)}$$

در این رابطه t برحسب s بدست می آید که با معکوس گرفتن، S(t) بدست می آید.

$$v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left( \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left( 1000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \right) = 27.8 \text{ m/s} \quad v_C = 50 \frac{1000}{3600} = 13.89 \text{ m/s}$$

$$\int_{v_A}^v v dv = a_t \int_0^s ds \quad \longrightarrow \quad a_t = \frac{1}{2s} (v_C^2 - v_A^2) = \frac{(13.89)^2 - (27.8)^2}{2(120)} = -2.41 \text{ m/s}^2$$

$$[a^2 = a_n^2 + a_t^2] \quad a_n^2 = 3^2 - (2.41)^2 = 3.19 \quad a_n = 1.785 \text{ m/s}^2$$

نقطه A:

$$[a_n = v^2/\rho] \quad \rho = v^2/a_n = (27.8)^2/1.785 = 432 \text{ m}$$

$$a = a_t = -2.41 \text{ m/s}^2$$

نقطه B: این نقطه، نقطه تقعر است در نتیجه شعاع انحنا بینهایت شده که منجر به صفر شدن شتاب در راستای n می شود.

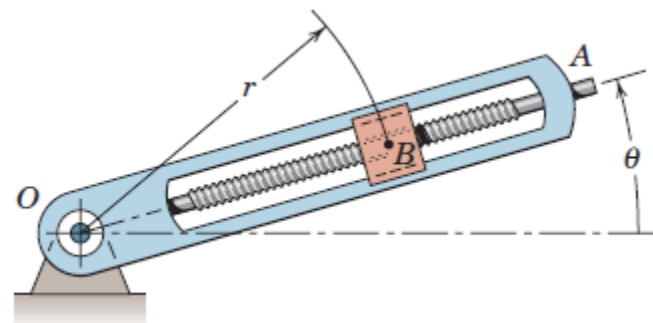
$$[a_n = v^2/\rho] \quad a_n = (13.89)^2/150 = 1.286 \text{ m/s}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a} = 1.286\mathbf{e}_n - 2.41\mathbf{e}_t \text{ m/s}^2$$

نقطه C:

$$[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}] \quad a = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73 \text{ m/s}^2$$

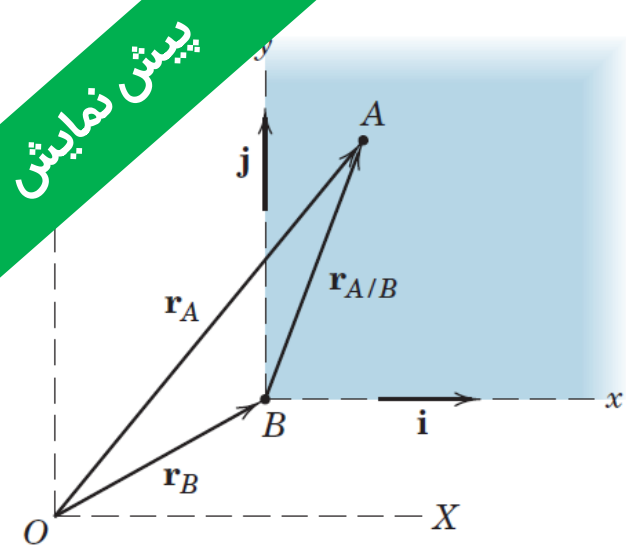
تمرین: مسائل ۲/۱۱۲، ۲/۱۲۶، ۲/۱۲۵ و ۲/۱۳۰ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.

مثال ۴: رابطه حرکت مکانیزم روبرو بصورت  $\theta = 0.2t + 0.02t^3$  و  $r = 0.2 + 0.04t^2$  می باشد. اندازه سرعت و شتاب را در لحظه  $t=3$  بدست آورید.



جزوه دینامیک

به کمک بردارها می‌توان حرکت یک ذره را با حرکت ذره دیگر بیان نمود.



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$

بردار مکان

بردار سرعت

بردار شتاب

**مثال ۵:** هواپیمای B با جهت ۴۵ درجه نشان داده شده حرکت می‌کند. مسافران هواپیمای A که با سرعت ۸۰۰ کیلومتر بر ساعت در حرکت است، در یک لحظه هواپیمای B را با جهت ۶۰ درجه بصورت نشان داده شده می‌بینند. سرعت واقعی هواپیمای B را بیابید.

**حل:** با توجه به روابط فوق می‌توانیم به راحتی مسئله را حل نمائیم.

$$\mathbf{v}_A = 800\mathbf{i} \text{ km/h} \quad \mathbf{v}_B = (v_B \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (v_B \sin 45^\circ)\mathbf{j}$$

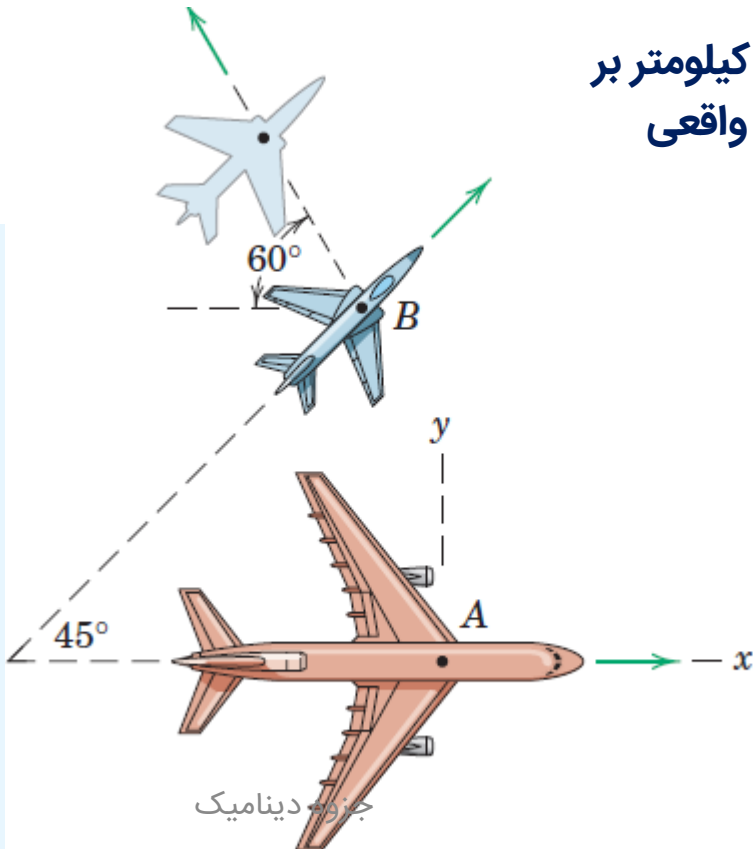
$$\mathbf{v}_{B/A} = (v_{B/A} \cos 60^\circ)(-\mathbf{i}) + (v_{B/A} \sin 60^\circ)\mathbf{j}$$

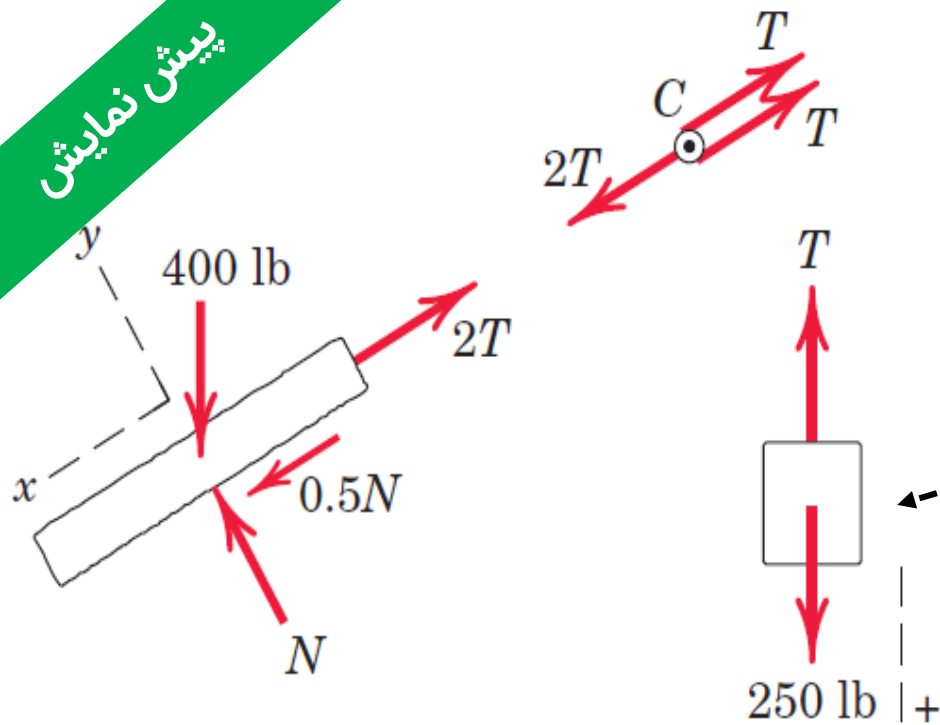
$$(\mathbf{i}\text{-terms}) \quad v_B \cos 45^\circ = 800 - v_{B/A} \cos 60^\circ$$

$$v_{B/A} = 586 \text{ km/h}$$

$$(\mathbf{j}\text{-terms}) \quad v_B \sin 45^\circ = v_{B/A} \sin 60^\circ$$

$$v_B = 717 \text{ km/h}$$





حال با رسم دیاگرام و انتخاب دستگاه مختصات مناسب، داریم:

$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$[\Sigma F_x = ma_x]$$

$$[+ \downarrow \Sigma F = ma]$$

$$N - 400 \cos 30^\circ = 0 \quad N = 346 \text{ lb}$$

$$0.5(346) - 2T + 400 \sin 30^\circ = \frac{400}{32.2} a_C$$

$$250 - T = \frac{250}{32.2} a_A$$

با حل ۳ معادله فوق:

$$a_A = 5.83 \text{ ft/sec}^2 \quad a_C = -2.92 \text{ ft/sec}^2 \quad T = 205 \text{ lb}$$

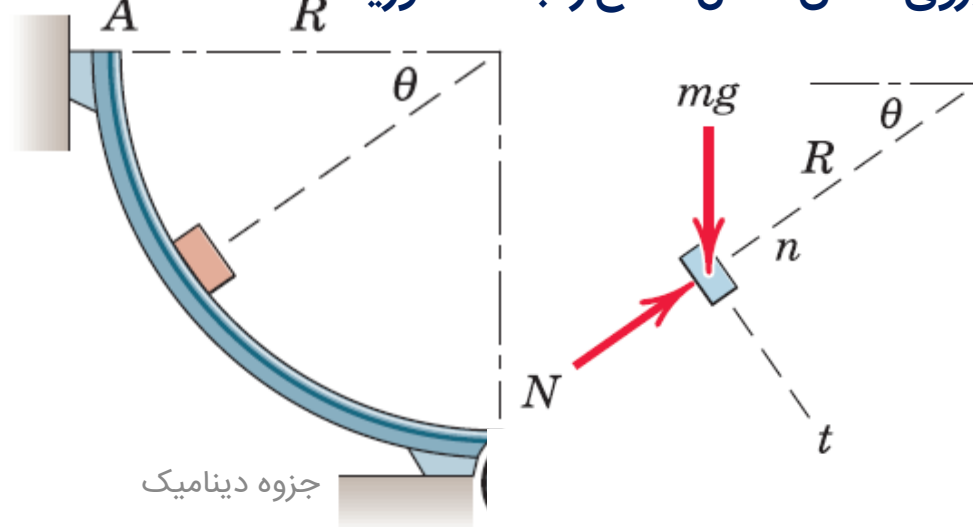
$$[v^2 = 2ax]$$

$$v_A = \sqrt{2(5.83)(20)} = 15.27 \text{ ft/sec}$$

**تمرین:** مسائل ۳/۱۹، ۳/۲۱، ۳/۲۹، ۳/۳۵ و ۳/۴۳ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.

**مثال ۹:** بلوک نشان داده شده در شکل روبرو از حالت سکون و از نقطه A رها می شود. رابطه نیروی عکس العمل سطح را بدست آورید.

**حل:** در این مسائل بهتر است از دستگاه عمودی- مماسی استفاده کنیم:



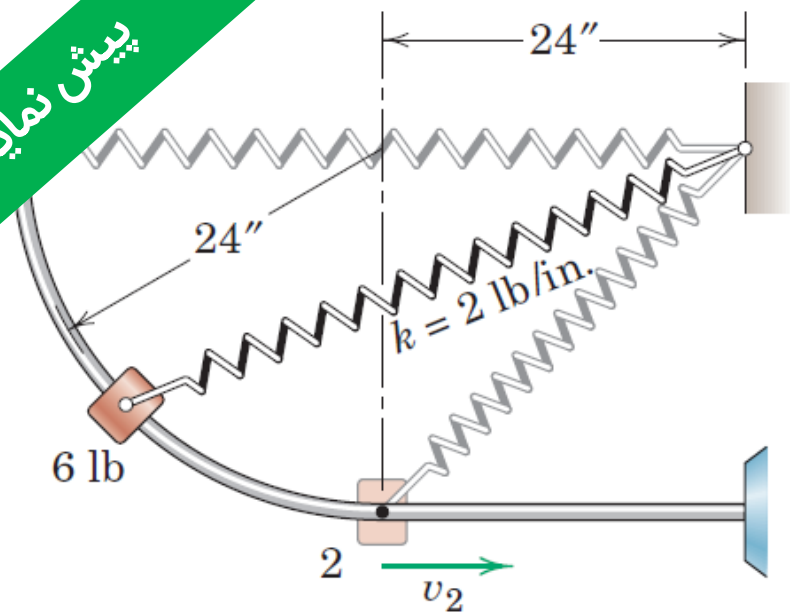
$$[\Sigma F_t = ma_t]$$

$$mg \cos \theta = ma_t \quad a_t = g \cos \theta$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^\theta g \cos \theta d(R\theta) \quad v^2 = 2gR \sin \theta$$

$$[\Sigma F_n = ma_n]$$

$$N - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad N = 3mg \sin \theta$$



**مثال ۱۲:** بلوک نشان داده شده بر روی سطح بدون اصطکاک از حالت ۱ رها شده است. طول فنر در حالت آزاد ۲۴ اینچ است. مطلوبست سرعت بلوک در نقطه ۲.

**حل:** با استفاده از قضیه کار و انرژی داریم:

انرژی پتانسیل گرانش:

$$V_2 = -mgh = -6 \left( \frac{24}{12} \right) = -12 \text{ ft-lb}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} (2)(12) \left( \frac{24}{12} \right)^2 = 48 \text{ ft-lb}$$

انرژی پتانسیل فنر:

$$V_2 = \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} (2)(12) \left( \frac{24\sqrt{2}}{12} - \frac{24}{12} \right)^2 = 8.24 \text{ ft-lb}$$

$$[T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2] \quad 0 + 48 + 0 = \frac{1}{2} \left( \frac{6}{32.2} \right) v_2^2 - 12 + 8.24 \quad \longrightarrow \quad v_2 = 23.6 \text{ ft/sec}$$

**تمرین:** مسائل ۳/۱۱۷، ۳/۱۲۶، ۳/۱۲۹، ۳/۱۴۴ و ۳/۱۷۰ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.



**پیش نمایش**

$$\mathbf{v}_2 = 10.26\mathbf{i} + 13.33\mathbf{j} \text{ m/s} \quad \longrightarrow \quad [v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}] \quad v_2 = \sqrt{(10.26)^2 + (13.33)^2} = 16.83 \text{ m/s}$$

**تمرین:** مسائل ۳/۲۰۶، ۳/۲۰۹، ۳/۲۱۳ و ۳/۲۱۴ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.

## ضربه و مومنتوم زاویه‌ای

مومنتوم زاویه‌ای برابر با گشتاور مومنتوم خطی حول مبدأ می‌باشد.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \quad \longrightarrow \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$

مشابه با مومنتوم خطی، چنانچه مقدار **ضربه دورانی** صفر باشد، اصل بقای مومنتوم دورانی اثبات می‌شود.

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

ضربه دورانی

$$\Delta \mathbf{H}_O = \mathbf{0} \quad \text{or} \quad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای

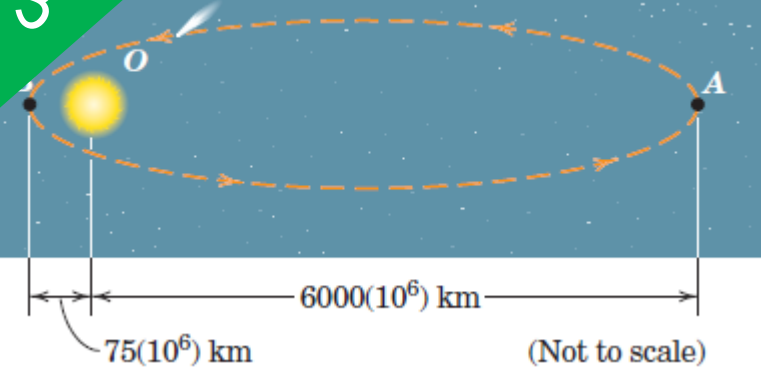


**مثال ۱۴:** سرعت ماهواره نشان داده شده در نقطه A برابر ۷۴۰ متر برثانیه می باشد. سرعت آن را در نقطه B بدست آورید.

**حل:** با فرض ذره بودن ماهواره (که فرض صحیحی است) و این نکته که سیستم کانسرویتیو (پایستار) است داریم:

$$(H_O)_A = (H_O)_B \longrightarrow mr_A v_A = mr_B v_B$$

$$v_B = 59\,200 \text{ m/s}$$

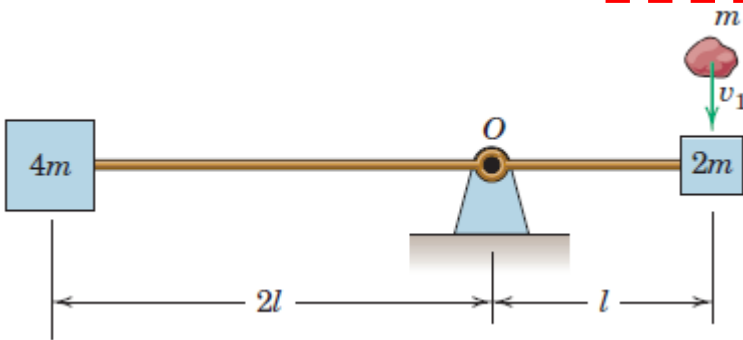


**مثال ۱۵:** سرعت زاویه ای میله را بلافاصله پس از برخورد بدست آورید. (میله بدون جرم است)

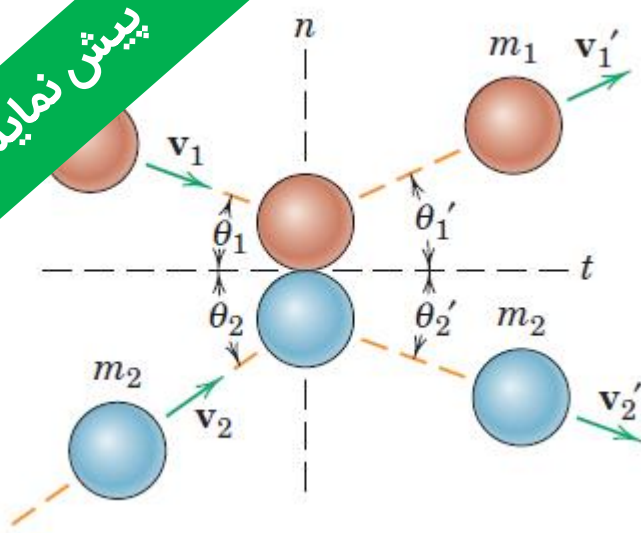
**حل:** توجه داریم که سیستم کانسرویتیو (پایستار) است داریم:

$$(H_O)_1 = (H_O)_2 \longrightarrow mv_1 l = (m + 2m)(l \dot{\theta}_2)l + 4m(2l \dot{\theta}_2)2l$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{v_1}{19l} \text{ CW}$$



**تمرین:** مسائل ۳/۲۳۲، ۳/۲۳۵، ۲/۲۳۷ و ۳/۲۳۸ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.



(۲) مومنتوم خطی ذرات در جهت مماس بر ضربه (t) پایستار است.

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t$$

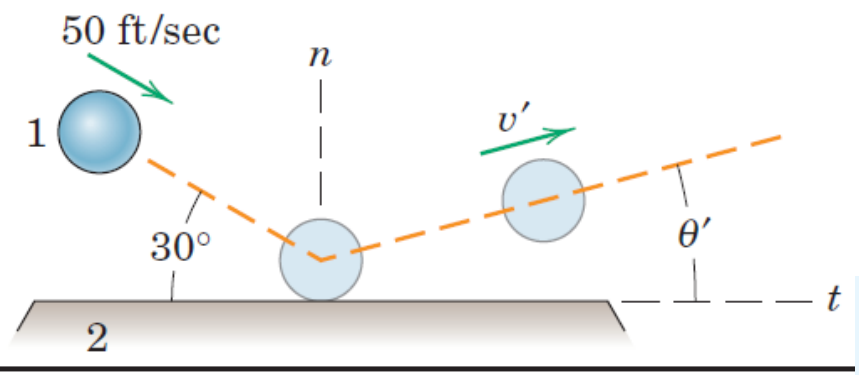
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t$$

(۳) ضریب بازگشت

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

**مثال ۱۶:** سرعت پس از برخورد و زاویه تتا را در شکل روبرو محاسبه کنید. ضریب بازگشت ۰/۵ است.

**حل:** باتوجه به اینکه جرم دوم بسیار زیاد است (دیوار) و سرعت آن صفر است داریم:

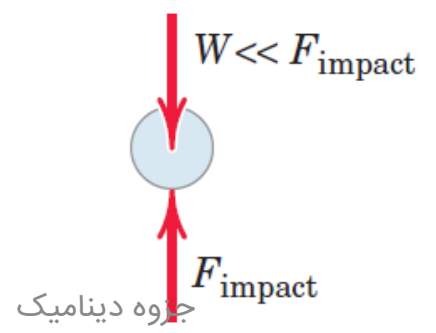


$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \quad 0.5 = \frac{0 - (v_1')_n}{-50 \sin 30^\circ - 0} \quad (v_1')_n = 12.5 \text{ ft/sec}$$

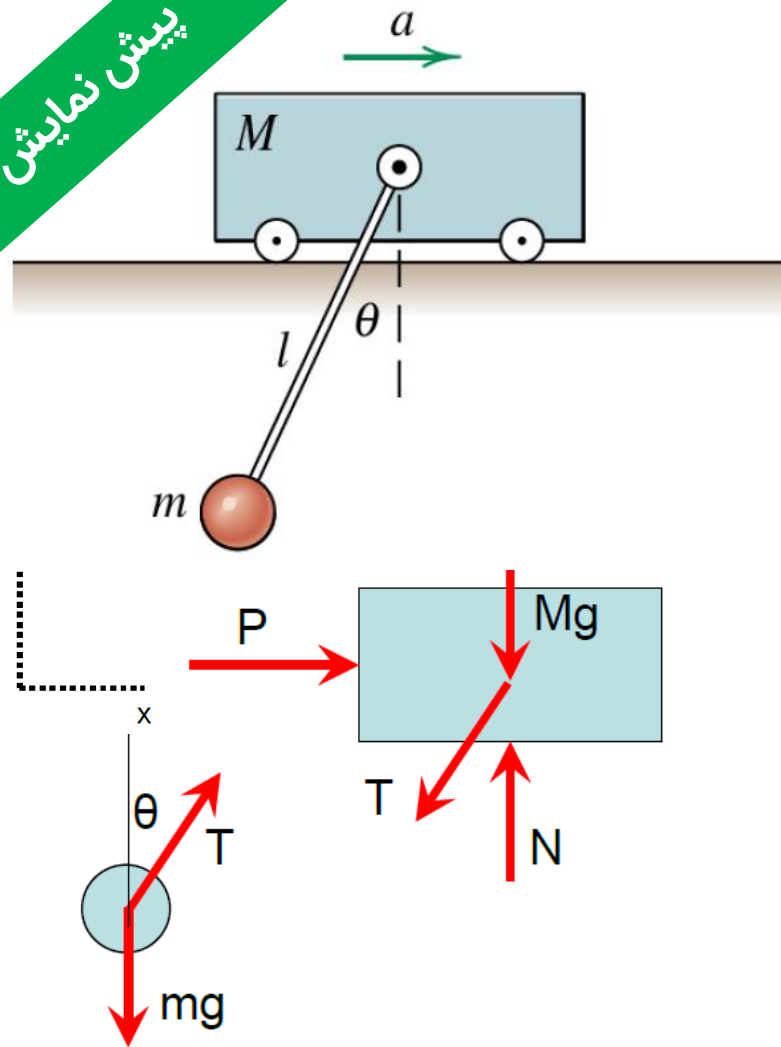
$$m(v_1)_t = m(v_1')_t \quad (v_1')_t = (v_1)_t = 50 \cos 30^\circ = 43.3 \text{ ft/sec}$$

$$v' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{12.5^2 + 43.3^2} = 45.1 \text{ ft/sec}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left( \frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{12.5}{43.3} \right) = 16.10^\circ$$



**تمرین:** مسائل ۳/۲۴۷، ۳/۲۵۴، ۳/۲۵۵ و ۳/۲۶۶ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.



**مثال ۱۷:** زاویه پایدار تتا برای شکل مقابل که جسم با شتاب  $a$  به راست حرکت می کند چقدر است؟  
**حل:**

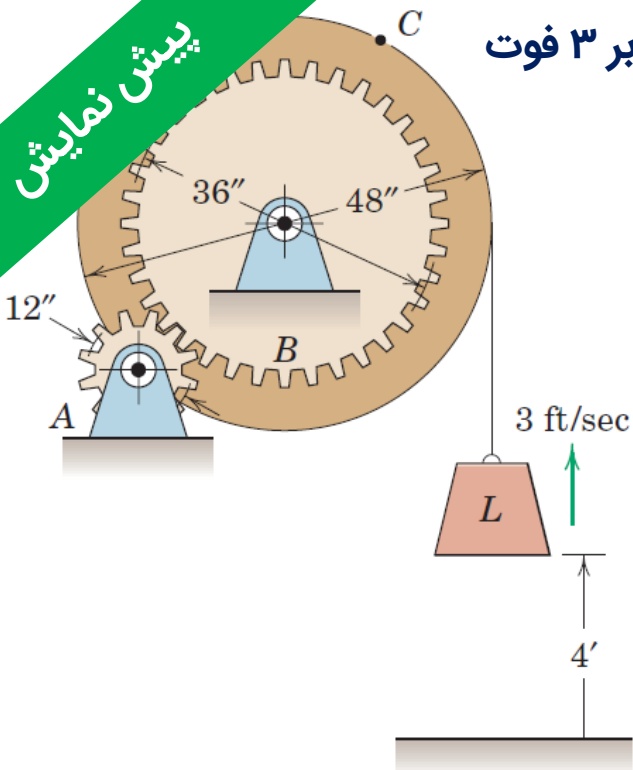
برای پاندول

$$\left[ \sum F_y = 0 \right] \quad T \cos \theta - mg = 0, \quad T = mg / \cos \theta$$

$$\left[ \sum F_x = ma_x \right] \quad T \sin \theta = ma, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{a}{g} \right)$$

**مثال ۱۸:** در شکل داده شده، وزنه L از حالت سکون به اندازه ۴ فوت به بالا کشیده شده است. سرعت در این لحظه برابر ۳ فوت بر ثانیه به سمت بالا می باشد. مطلوبست شتاب نقطه C و سرعت و شتاب زاویه ای پینیون A.

**حل:** باتوجه به روابط سینماتیکی داریم:



$$[v^2 = 2as]$$

$$a = a_t = v^2/2s = 3^2/[2(4)] = 1.125 \text{ ft/sec}^2$$

$$[a_n = v^2/r]$$

$$a_n = 3^2/(24/12) = 4.5 \text{ ft/sec}^2$$

$$[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}]$$

$$a_C = \sqrt{(4.5)^2 + (1.125)^2} = 4.64 \text{ ft/sec}^2$$

$$[v = r\omega]$$

$$\omega_B = v/r = 3/(24/12) = 1.5 \text{ rad/sec}$$

$$[a_t = r\alpha]$$

$$\alpha_B = a_t/r = 1.125/(24/12) = 0.562 \text{ rad/sec}^2$$

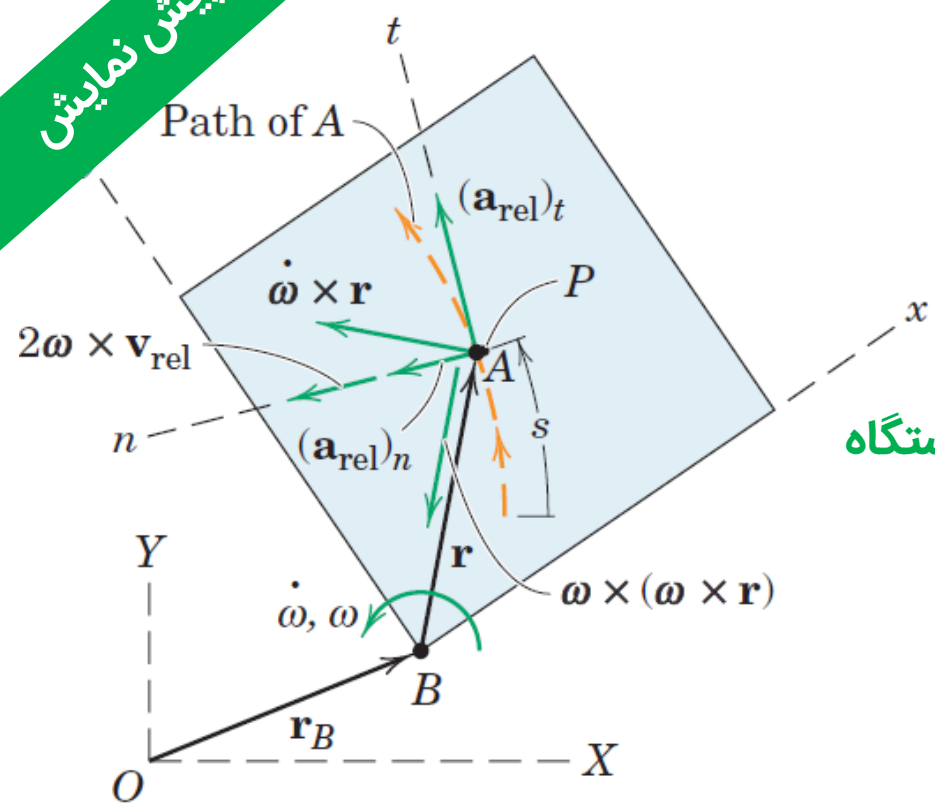
$$v_1 = r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$\omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B = \frac{18/12}{6/12} 1.5 = 4.5 \text{ rad/sec CW}$$

$$a_1 = r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$$

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B = \frac{18/12}{6/12} 0.562 = 1.688 \text{ rad/sec}^2 \text{ CW}$$

**تمرین:** مسائل ۵/۱۷، ۵/۲۱ و ۵/۲۸ کتاب مریام ویرایش ۷ را حل کنید.



$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

شتاب خطی دستگاه

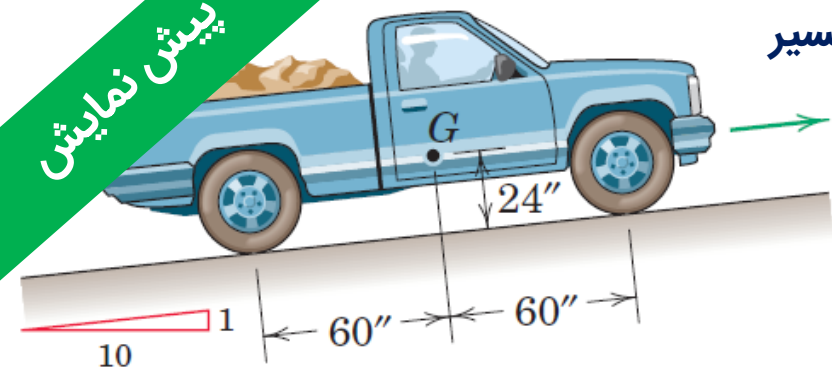
شتاب مرکزگرا

شتاب مماسی

شتاب کوریولیس

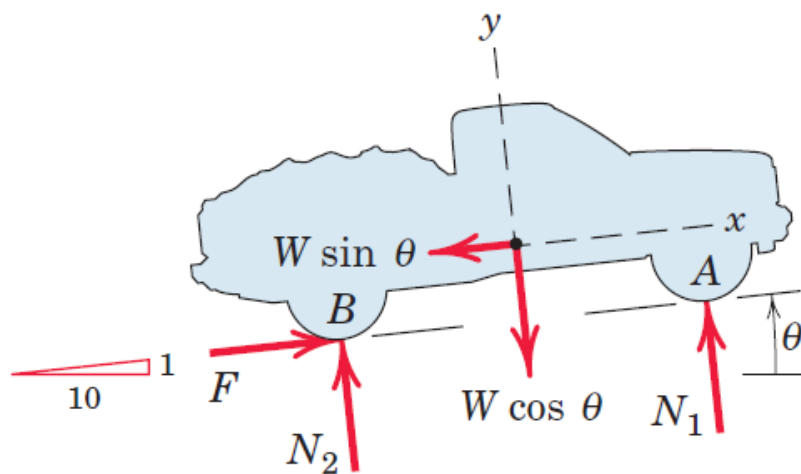
شتاب نسبی

شاید مهم‌ترین نکته در حل مسائل اجسام صلب، انتخاب محل دستگاه مختصات باشد. مثلاً در یک سیستم دوار چنانچه دستگاه دوار را روی جسم در نظر بگیریم، به راحتی کلیه ترم‌های رابطه فوق محاسبه می‌شود.



**مثال ۲۰:** خودروی نشان داده شده به وزن ۳۲۲۰ پوند، از حالت سکون به سرعت ۳۰ مایل بر ساعت با طی مسیر ۲۰۰ فوتی با شتاب ثابت می‌رسد. ضریب اصطکاک ۰/۸ می‌باشد. عکس العمل سطوح را بیابید.

**حل:** دیاگرام آزاد نیروها را رسم کرده و باتوجه به روابط حرکت داریم:



$$[v^2 = 2as] \quad \bar{a} = \frac{(44)^2}{2(200)} = 4.84 \text{ ft/sec}^2$$

$$W \cos \theta = 3220 \cos 5.71^\circ = 3200 \text{ lb}$$

$$W \sin \theta = 3220 \sin 5.71^\circ = 320 \text{ lb.}$$

$$m\bar{a} = \frac{3220}{32.2} (4.84) = 484 \text{ lb}$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x]$$

$$F - 320 = 484 \quad F = 804 \text{ lb}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0]$$

$$N_1 + N_2 - 3200 = 0$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0]$$

$$60N_1 + 804(24) - N_2(60) = 0$$

$$N_1 = 1441 \text{ lb} \quad N_2 = 1763 \text{ lb}$$



برای تهیه جزوه کامل به [www.gam98.ir](http://www.gam98.ir) مراجعه نمایید.